

# Magnétostatique

**Chapitre I : Champ magnétique - Propriétés générales du champ magnétique**

**Chapitre II : Forces magnétique – Travail des forces magnétiques**

# Chapitre I

## CHAMP MAGNETIQUE

- 1- Introduction – Notions de forces magnétiques et champ magnétique
- 2- Champ magnétique créé par des courants – Loi de Biot et Savart
- 3- Propriétés de circulation de  $\vec{B}$  – Théorème d'Ampère
- 4- Propriétés de flux de  $\vec{B}$  – Potentiel vecteur
- 5- Relations de passage
- 6- Dipôles magnétiques

# Magnétostatique

## Introduction :

Nous avons étudié, à la première partie de ce module, l'interaction électrique qui intervient entre deux matériaux électrisés. Nous allons considérer, à présent, une autre interaction, l'interaction magnétique, qui fait intervenir le champ magnétique.

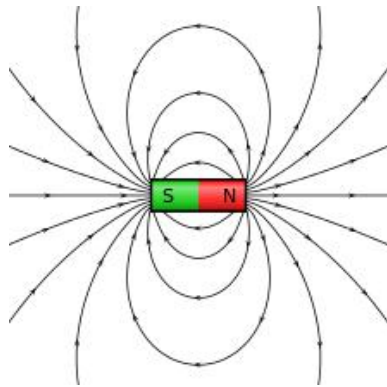
En effet : Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement.

Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

**Définition :** La **magnétostatique** est l'étude des phénomènes où le champ magnétique est statique, c'est-à-dire ne dépend pas du temps (produit par un courant continu).

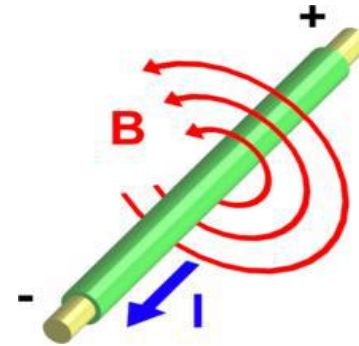
Un champ magnétique statique se rencontre dans les deux cas suivants :

1. lorsque le champ magnétique est produit par un aimant,



Champ magnétique créé par un aimant

2. lorsque le déplacement de charges électriques forme un courant électrique ne dépendant pas du temps : courant continu ;



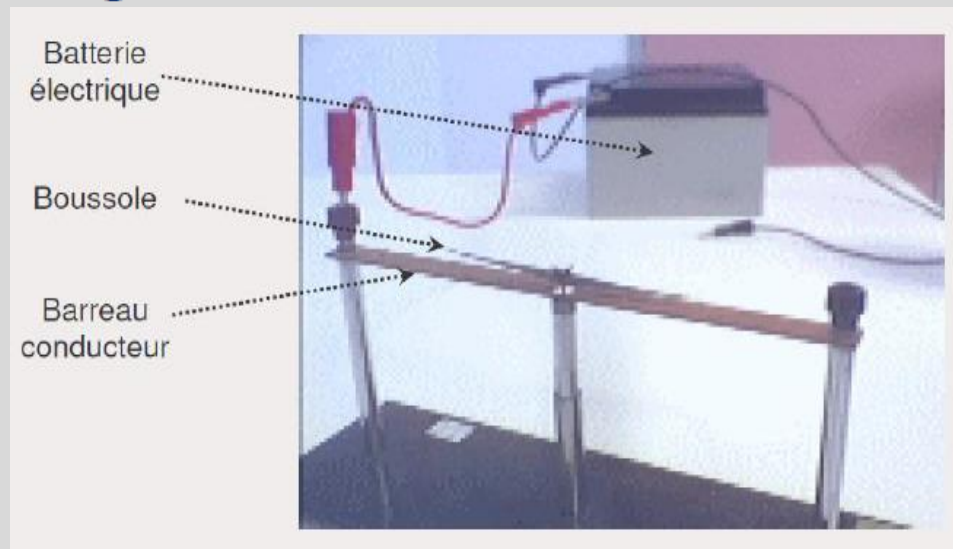
Champ magnétique créé par un courant électrique

# Introduction – Notions de forces magnétiques et champ magnétique

Le phénomène de magnétisme se manifeste

d'abord par l'existence de **forces**

**Expérience d'Oersted (1920)** : établit le lien entre magnétisme et électricité



Lorsque le courant est non nul, l'aiguille de la boussole dévie de sa position

**Conclusion** :  
*le courant électrique* modifie les propriétés de l'espace qui l'entoure



➔ *On traduit cette modification des propriétés de l'espace par l'existence d'un **champ magnétique** créé par les charges en mouvement*

## En résumé

➔ Un aimant, un courant électrique ou plus généralement toute charge électrique en mouvement modifie les propriétés de l'espace qui l'entoure.

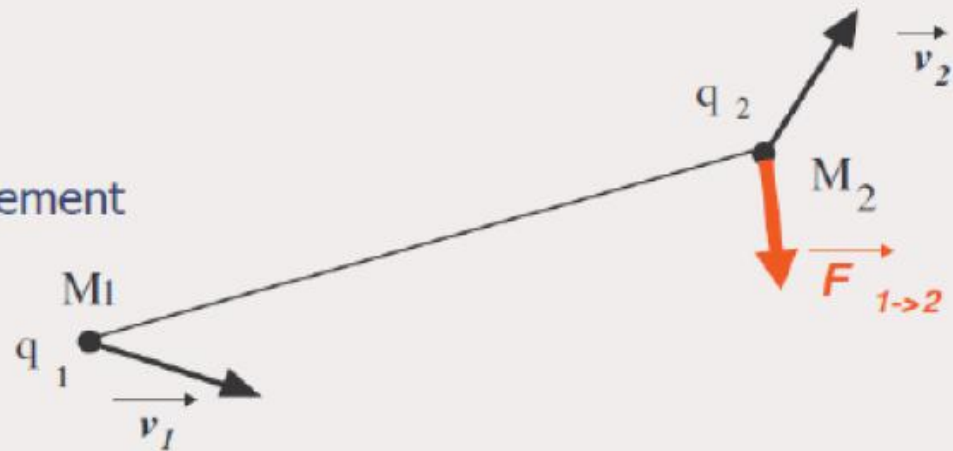
Dans cet espace est créé un **champ magnétique**.

➔ Toute charge en mouvement dans un champ magnétique subit des forces magnétiques qui modifient ce mouvement.

# Forces magnétiques entre charges en mouvement

Hypothèses :

- référentiel fixe
- charges  $q_1$  et  $q_2$  en mouvement
- $\vec{r} = \overline{M_1 M_2}$



Force exercée sur  $q_2$  (par  $q_1$ ) : 
$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{V}_2 \wedge \left( \frac{\mu_0 q_1 \vec{V}_1 \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} \right)$$

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m

Remarques :

- On n'exprime ici que la composante magnétique exercée par  $q_1$  sur  $q_2$
- Si  $\vec{V}_1 // \vec{r} \Rightarrow \vec{F}_{12} = \vec{0}$  idem si  $\vec{V}_2 \perp$  au plan  $(\vec{r}, \vec{V}_1)$   
 $\Rightarrow F_{12}$  max si les mouvements sont parallèles et  $\perp$  à  $\vec{r}$

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{V}_2 \wedge \left( \frac{\mu_0 q_1 \vec{V}_1 \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} \right)$$

On peut donc dire que la charge en mouvement  $q_1$  crée au point  $M_2$  où se trouve la charge  $q_2$ , un **champ magnétique**  $\vec{B}_1$  tel que :

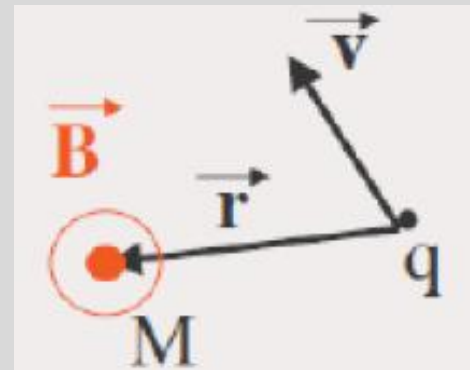
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q_1 \vec{V}_1 \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_{12} = q_2 \vec{V}_2 \wedge \vec{B}_1$$

Champ créé par  $q_1$  en  $M_2$

Force subie par  $q_2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{V} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

pseudo-vecteur (vecteur axial)



## ➔ Force magnétique de Lorentz

exercée sur une particule de charge  $q$ , animée de la vitesse  $\vec{V}$ , dans un champ magnétique extérieur (ou appliqué)  $\vec{B}$

$$\vec{F} = q \underbrace{(\vec{V} \wedge \vec{B})}_{\text{Quantité homo-}} \\ \text{gène à un champ} \\ \text{électrique}$$

La particule subit une force magnétique de Lorentz  $\vec{F}$  orthogonale à  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$

**Généralisation** : en présence d'un champ **électrique** et d'un champ **magnétique**, champ **électromagnétique**  $(\vec{E}, \vec{B})$ , la force s'exerçant sur une particule chargée en mouvement sera :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$



## Champ magnétique créé par des courants – Loi de Biot et Savart

### Principe de calcul du champ magnétique $\vec{B}$

- On considère un élément ( $d\mathbf{l}$ ,  $d\mathbf{S}$  ou  $d\boldsymbol{\tau}$ ) entourant un point P de la distribution de courant :
- On appelle  $dq$  la charge contenue dans cet élément, animée de la vitesse  $\vec{V}$  ;
- Par analogie avec la charge élémentaire, on exprime la contribution  $d\vec{B}$  créée en un point M à la distance  $\mathbf{r}$  de  $dq$  :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

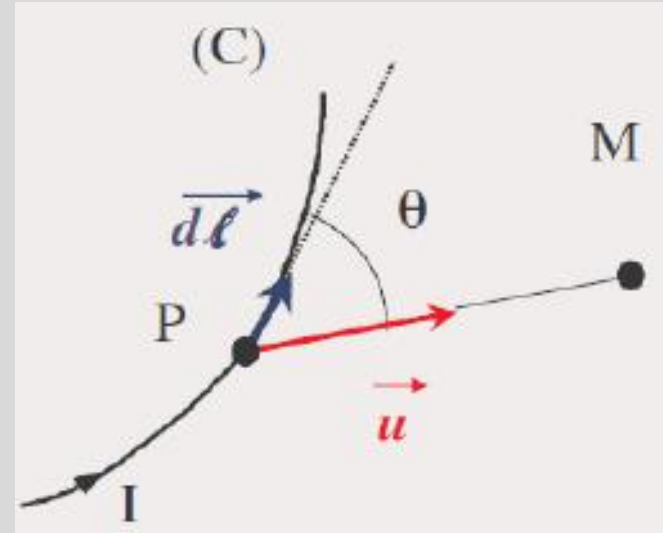
$dq$  : charge associée à un élément  $d\mathbf{l}$ ,  $d\mathbf{S}$  ou  $d\boldsymbol{\tau}$

- On intègre  $d\vec{B}$  sur toute la distribution des courants.

$$\vec{B} = \int_{(C),(S)\text{ ou }(\boldsymbol{\tau})} d\vec{B}$$

# Champ magnétique créé par un élément de courant filiforme – Loi de Biot et Savart

- **circuit (C) filiforme** parcouru par un courant d'intensité **I** ;
- la **quantité de charges mobiles** qui passe en P pendant **dt** est **dq = Idt**, c'est la charge contenue dans un élément de courant **d $\vec{l}$  =  $\vec{V}dt$**  orienté dans le sens du courant.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq \vec{V} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 Idt \vec{V} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 Id\vec{l} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2}$$

Norme de  $d\vec{B}$  :  $dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r^2}$

$$\vec{r} = r\vec{u}$$

Champ magnétique créé par tout le circuit (C) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{(C)} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

**Loi de Biot et Savart**

# Champ magnétique créé par une distribution de courant en surface ou nappe de courant (S)

- **Nappe (S)** parcourue par un courant de densité de courant surfacique  $\vec{k}$  (en A/m)

- Si on choisit (C) tel que

$$\vec{n} // \vec{k} \text{ alors } k = \frac{dI}{d\lambda}$$

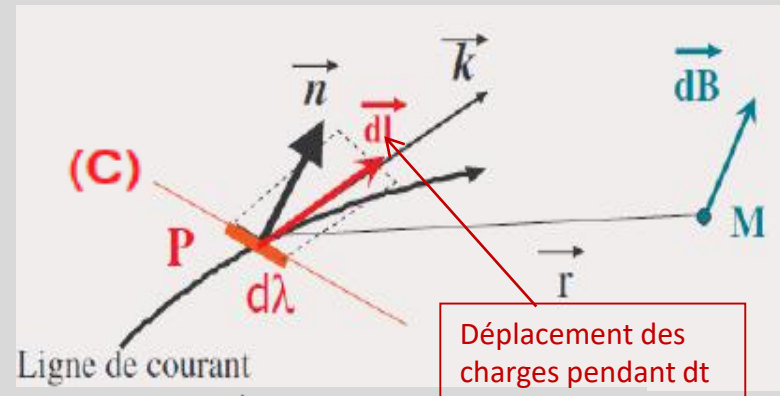
- Cas général : seule la composante de  $\vec{k} // \vec{n}$  contribue à

$$dI : dI = \vec{k} \cdot \vec{n} d\lambda, \text{ pendant } dt : dq = dI dt = \vec{k} \cdot \vec{n} d\lambda dt$$

On cherche le champ  $d\vec{B}$  créé en un point M par  $dq$  :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{k} \cdot \vec{n} d\lambda dt \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(d\vec{l} \cdot \vec{n} d\lambda) \vec{k} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{k} \wedge \vec{r}}{r^3} dS$$

Pour toute la nappe de surface (S) : 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{\vec{k} \wedge \vec{u}}{r^2} dS$$

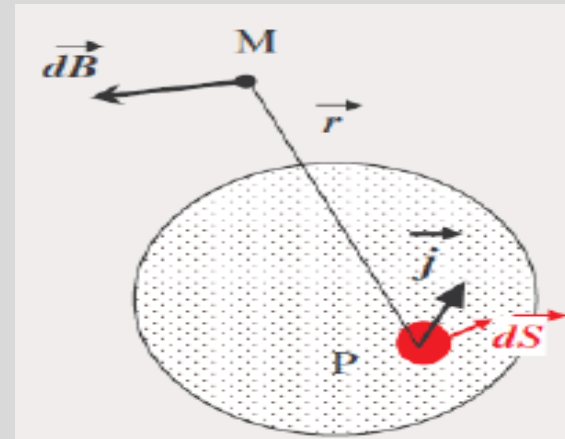


Surface Portant dq

# Champ magnétique créé par une distribution de courant en volume

- conducteur **massif**
- parcouru par un courant de densité de courant volumique  $\vec{j}$  (en A/m<sup>2</sup>)
- charges mobiles animés d'une vitesse  $\vec{V}$

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V}$$



Densité volumique de charges mobiles en C/m<sup>3</sup>

On cherche le champ  $d\vec{B}$  créé en un point M par  $dq$  (contenue dans le volume  $d\tau$ ) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho_m d\tau \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

Pour tout le volume ( $\tau$ ) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

## Loi de Biot et Savart et ses formes dérivées

Distribution de courants filiformes  
 $I (d\ell)$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2}$$

Distribution de courants surfaciques  
 $\vec{k} (dS)$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{k} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2} dS$$

Distribution de courants volumiques  
 $\vec{j} (d\tau)$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2} d\tau$$

# Les unités utilisées

Dans le système SI, l'unité de champ magnétique est le Tesla (T).

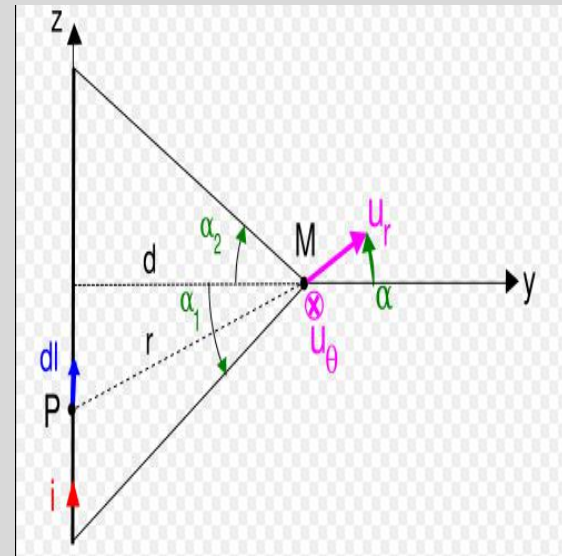
## Exemples :

- Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 20 à 30 mT.
- Dans les entrefers des très grosses dynamos ou alternateurs, on peut rencontrer des champs de 3 à 4 Teslas (valeurs les plus grandes).
- Le champ magnétique de l'accélérateur de particules du CERN est de l'ordre de 16 T.



## Exemple de calcul de champ $B$ : fil rectiligne AB

- Type de distribution de courants : filiforme, d'intensité  $I$ .
- Distribution de dimensions finies :  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les angles sous lesquels on voit les extrémités du fil.
- On demande de calculer le champ magnétique en tout point  $M$  repéré par sa distance  $a$  à l'axe du fil.



## → calcul de champ $B$ :

- Loi de Biot et Savart  $\rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id \vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$

- Le champ créé en M par une longueur infinitésimale  $d\vec{\ell}$  au point P du segment vaut :

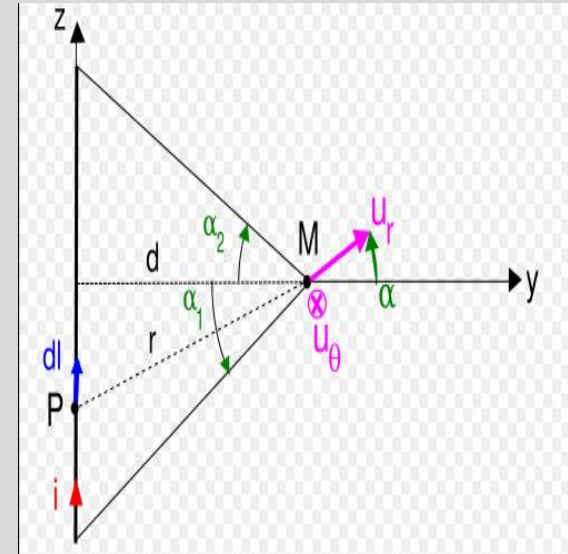
$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} (dz \vec{u}_z) \wedge (\cos(\alpha) \vec{u}_y + \sin(\alpha) \vec{u}_z) \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dz \cos(\alpha) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

- $z = d \tan(\alpha)$  donc  $dz = d \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$

- $r = \frac{d}{\cos(\alpha)}$

- Après remplacement, on obtient  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \cos(\alpha) d\alpha \vec{u}_\theta$

- Enfin, on intègre pour  $\alpha$  entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) \vec{u}_\theta$



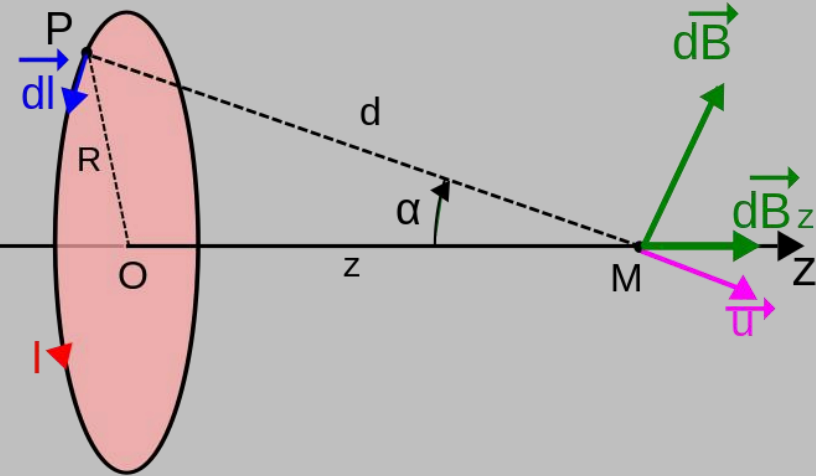


## b) Champ créé par une spire circulaire de rayon $R$ , parcourue par un courant $I$

Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par une spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par un courant  $I$ , le long de son axe de révolution confondu avec l'axe  $Oz$  des coordonnées cylindriques. Tracer l'allure des variations de  $\vec{B}(Z)$

On calcule le champ par la méthode directe en un point  $M$  de l'axe ( $Oz$ ) :

- Tout plan contenant ( $OZ$ ) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc  $\vec{B}(M)$  est suivant  $\vec{u}_z$



- La distribution est invariante par rotation autour de ( $OZ$ ) donc, en coordonnées cylindriques,  $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$ . En particulier, sur l'axe,  $B(M) = B(Z) \vec{u}_z$

- Le champ crée en  $M$  par une longueur infinitésimale de longueur  $d\ell$  située en  $P$  vaut:

$$d\vec{B}_{reel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} (d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \text{ (loi de Biot et Savart)}$$

En réalité la seule composante utile de ce champ élémentaire est la composante suivant

l'axe ( $OZ$ ). Comme  $\|d\vec{\ell} \wedge \vec{u}\| = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) d\ell$ , on considère  $dB_{reel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} d\ell \sin\alpha$

la norme de la projection de  $d\vec{B}_{reel}$  sur ( $OZ$ ),

On souhaite une expression en fonction de  $\alpha$ :

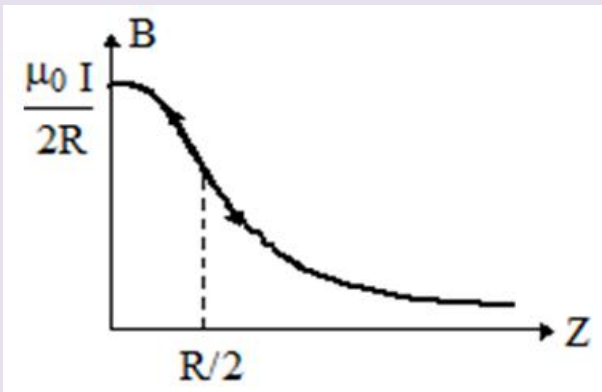
On remarque que:  $d = \frac{R}{\sin \alpha}$

On remplace : 
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} d\ell \sin^3(\alpha)$$

Enfin on intègre pour  $\ell$  compris entre 0 et  $2\pi R$  car  $\alpha$  est constant

$$B(M) = \int_0^\ell \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} d\ell \sin^3(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z \quad \text{or} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$$



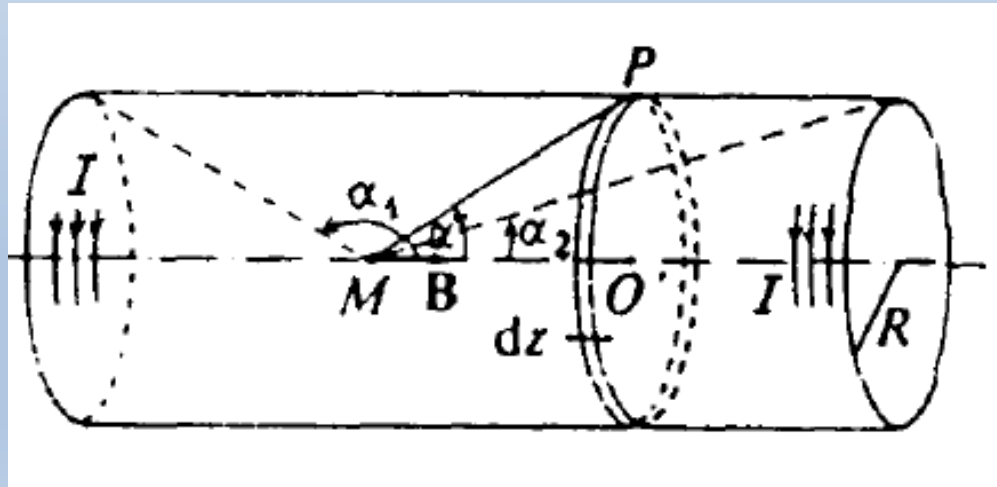
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right)^3 \vec{u}_z$$

### c. Champ magnétique créé par un solénoïde parcourue par un courant $I$

On désigne par solénoïde un circuit constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre. Soit  $L$  sa longueur  $R$  le rayon de sa section circulaire, et  $N$  le nombre total de spires parcourues par le courant  $I$ . Nous cherchons le champ en un point  $M$  de l'axe du solénoïde.

L'orientation de cet axe est déterminée par celle des spires selon la convention habituelle (règle du tire bouchon).

1. Déterminer le champ  $\vec{B}$  sur l'axe en fonction de  $I$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et  $n = \frac{N}{L}$  (On utilisera le champ créé par une spire).
2. Cas d'un solénoïde circulaire long idéal (c'est à dire considéré comme infini).



1. Tout plan contenant l'axe (ZZ') est plan d'anti-symétrie ce qui implique que  $\vec{B}$  est suivant  $\vec{e}_z$

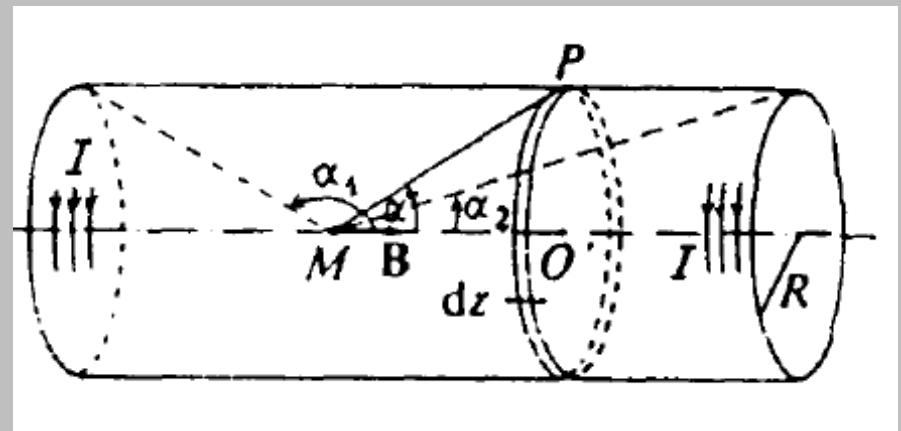
l'axe ZZ' est un axe de symétrie pour la bobine . Toute rotation autour de cet axe ne change rien. L'intensité de courant ne dépend pas de la variable  $\theta$ . En particulier sur l'axe (oz)

$$\Rightarrow \vec{B} = B(z)\vec{e}_z$$

- Calcul direct du champ magnétique au point P :

D'après l'exercice précédent le champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant I est :

$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$$



On peut déduire de l'expression du champ magnétique créé par une spire, l'expression du champ magnétique infinitésimale créé par la tranche de solénoïde de largeur dz' :

$$dN = ndZ = \frac{N}{L} dz$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I ndz}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$$

Dans cette expression apparaissent les deux variables  $z$  et  $\alpha$  liées par la relation suivante:

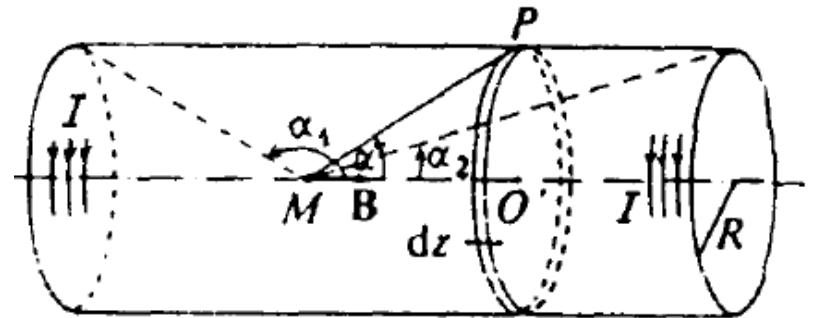
$$\tan \alpha = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R}{\tan \alpha}$$

Sachant que la dérivée de l'inverse de la fonction tangente est :

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{\tan \alpha} \right) = -\frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

Donc:

$$dZ = -\frac{R}{\sin^2(\alpha)} d\alpha$$



Finalement l'intensité du champ magnétique élémentaire s'écrit :

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} n \left( -\frac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha)} \right) \sin^3(\alpha) = \frac{\mu_0 n I}{2} (-\sin \alpha d\alpha)$$

$$B(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 n I}{2} (-\sin \alpha d\alpha) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

2. Cas d'un solénoïde infini :  $\alpha_1 \rightarrow \pi$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

# Propriétés de symétrie du champ magnétique

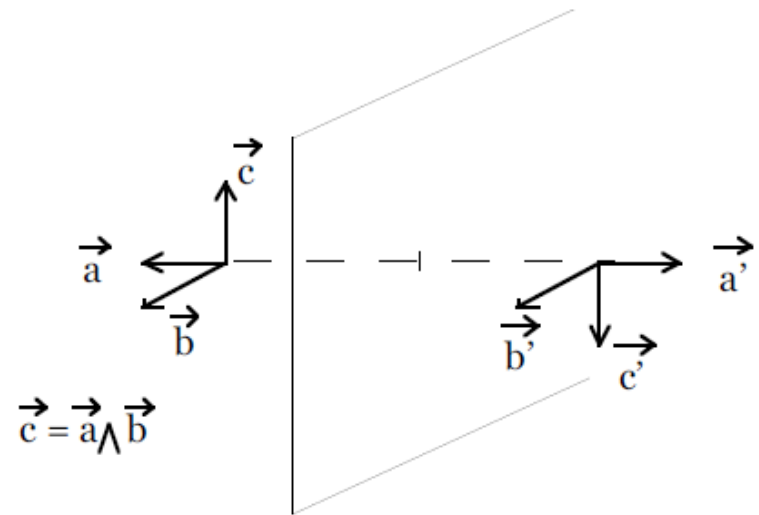
- Vecteurs et pseudo-vecteurs

Un vecteur polaire, ou vrai vecteur, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés. Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique.

Un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une convention d'orientation d'espace et dépend donc de cette convention. Exemple : le champ magnétique.

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. Le produit vectoriel de deux vrais vecteurs est un pseudo-vecteur.

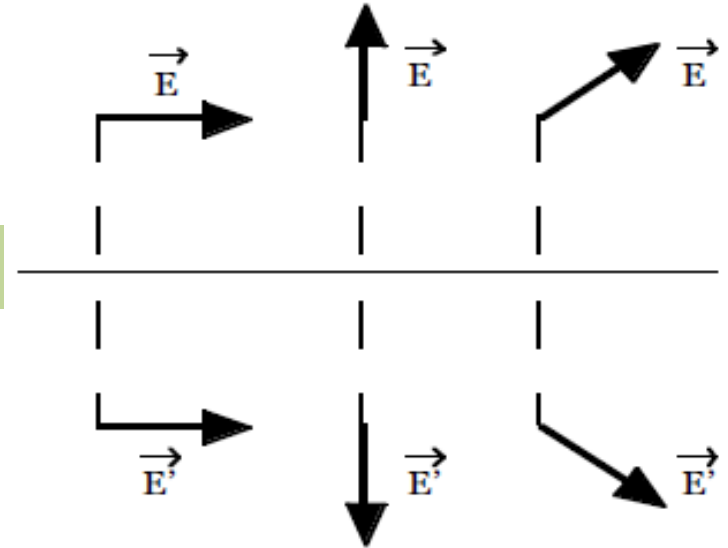
- Un vecteur est transformé en son symétrique,
- un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique



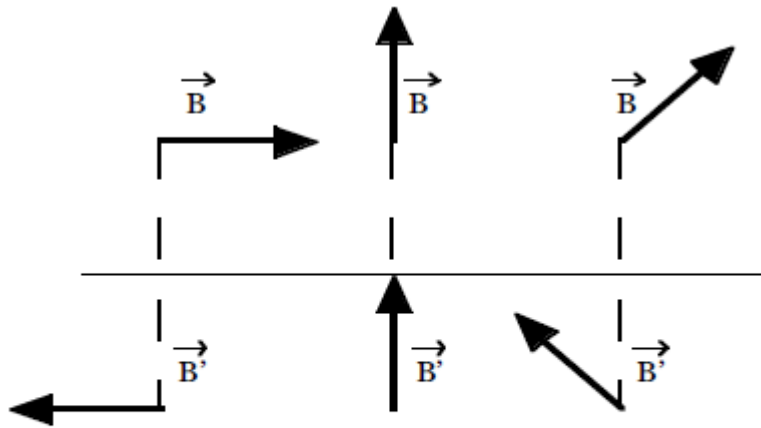
Transformation par rapport à un plan de symétrie

Un vecteur est transformé en son symétrique

$$\vec{E} \parallel \text{plan}_{sym}$$



Transformation d'un vecteur par symétrie par rapport à un plan



Transformation d'un pseudo-vecteur par symétrie par rapport à un plan

un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique

$$\vec{B} \perp \text{Plan}_{sym}$$

On peut montrer que toutes les règles obtenues pour les champs de vecteurs polaires sont **inversées** pour les pseudo-vecteurs

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Plan de symétrie ( $\pi$ )	$\vec{E}'(M')$ <i>symétrique</i> $\vec{E}(M)$	$\vec{B}'(M')$ <i>antisymétrique</i> $\vec{B}(M)$
Si $M \in (\pi)$	$\vec{E}(M) \parallel (\pi)$	$\vec{B}(M) \perp (\pi)$
Plan de antisymétrie ( $\pi$ )	$\vec{E}'(M')$ <i>antisymétrique</i> $\vec{E}(M)$	$\vec{B}'(M')$ <i>symétrique</i> $\vec{B}(M)$
Si $M \in (A\pi)$	$\vec{E}(M) \perp (A\pi)$	$\vec{B}(M) \parallel (A\pi)$

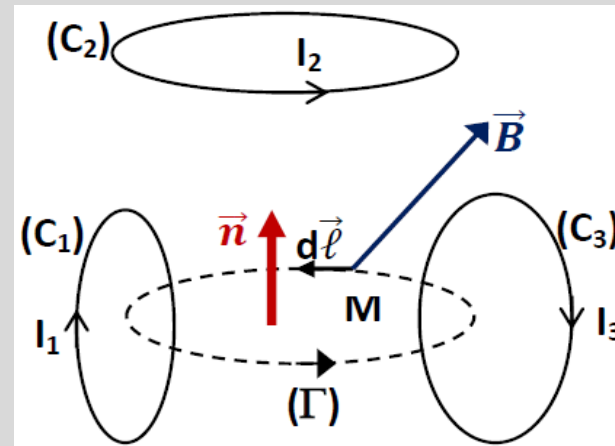
**Si la distribution de courants possède certaines propriétés d'invariance, le champ possédera ces mêmes propriétés.**



# Propriétés de circulation de $\vec{B}$ – Théorème d'Ampère

## 3-1- Loi (théorème) d'Ampère sous sa forme intégrale

- circuits  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et  $(C_3)$  dans le vide  $(\mu_0)$  ;
- contour fermé  $(\Gamma)$  orienté
- surface  $(S)$  s'appuyant sur  $(\Gamma)$  orientée suivant  $\vec{n}$  par **la règle du tire-bouchon**



La circulation du champ  $\vec{B}$  le long du contour fermé  $(\Gamma)$  :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_m I_m = -\mu_0 I_1 + \mu_0 I_3$$

est nulle si le circuit **n'enlace pas** le contour  $(\Gamma)$

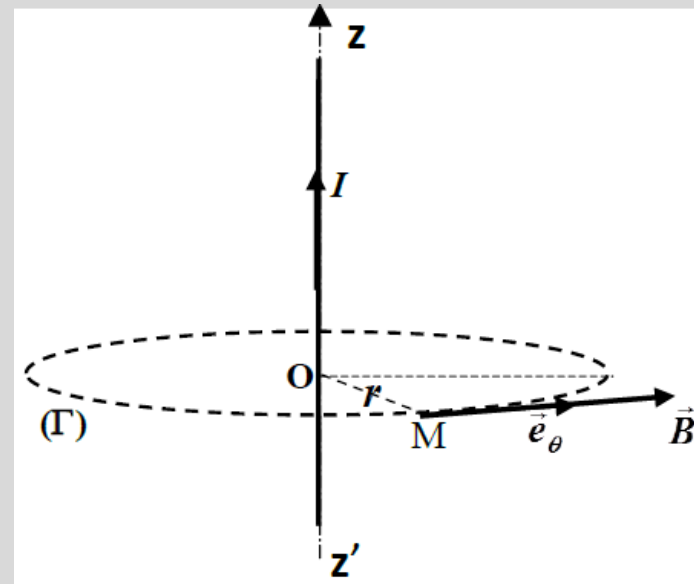
est égale à  $\mu_0 I_m$  si le circuit **m enlace** le contour  $(\Gamma)$

(+) si  $I$  a le sens de  $\vec{n}$  ; (-) dans le cas contraire.

## Exemple de calcul de champ $B$ : fil rectiligne infini

Il y a invariance par rotation autour de l'axe  $z'z$   $\rightarrow$  les lignes de champ sont des cercles de rayon  $r$  et d'axe  $z'z$ .

*Dans l'application du théorème d'Ampère, il faut toujours choisir un contour sur lequel  $\vec{B}$  garde une norme constante et a la même direction que  $d\vec{l}$  ou sur lequel  $\vec{B}$  est orthogonal à  $d\vec{l}$ .*



*Ici, on choisit donc un contour ( $\Gamma$ ) circulaire ayant la même direction que les lignes de champ.*

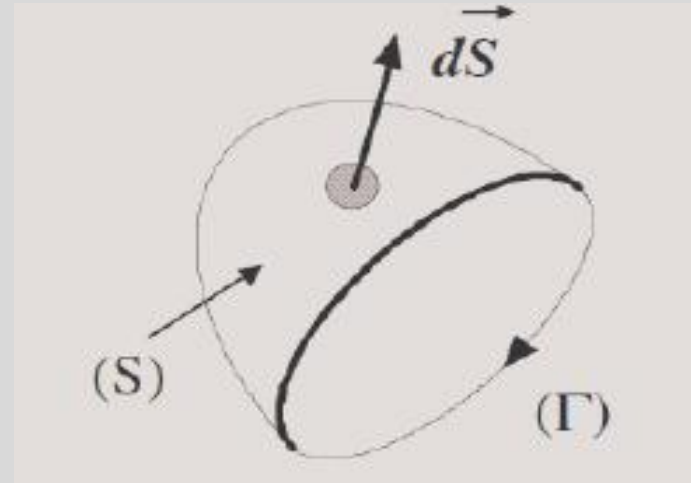
$$\text{Théorème d'Ampère : } \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$\vec{B}$  tangent à  $d\vec{l}$  et garde la même norme sur ( $\Gamma$ )

$$\text{Donc : } \int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

# Forme locale de la loi (théorème) d'Ampère

- (S) est une surface ouverte quelconque s'appuyant sur le contour fermé ( $\Gamma$ ) ;
- $d\vec{S}$  est orientée par rapport au sens positif de circulation sur le contour à l'aide de la règle du **tire-bouchon**.



**Théorème de Stokes**

$$\longrightarrow \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

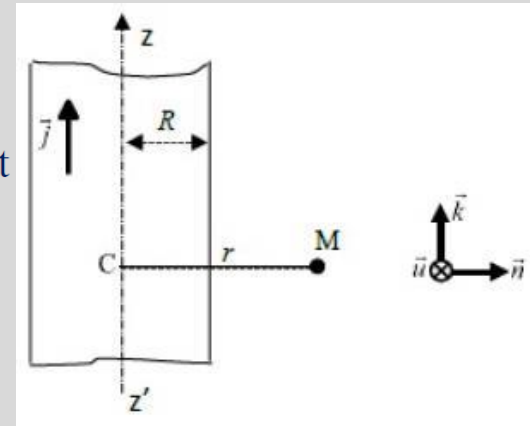
$$\longrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Le champ magnétique n'est donc **pas** à circulation conservative

## Exemple de calcul de champ $B$

On considère un câble conducteur cylindrique d'axe  $z'z$  d'unitaire  $\vec{k}$ , de rayon  $R$  et dont la longueur est très grande devant  $R$ . Le cylindre étant inhomogène, la densité de courant  $\vec{j}$  n'est pas uniforme et a, en un point M du cylindre de coordonnée  $r < R$ , pour expression :  $\vec{j}(M) = j_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \vec{k}$ ,

$j_0$  étant une constante positive.



1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$ , pour  $r < R$  et  $r > R$ ,  
a) à l'aide du théorème d'Ampère ; on vérifiera alors que les relations de passage sont satisfaites,

b) à l'aide de la relation locale  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et des relations de passage.

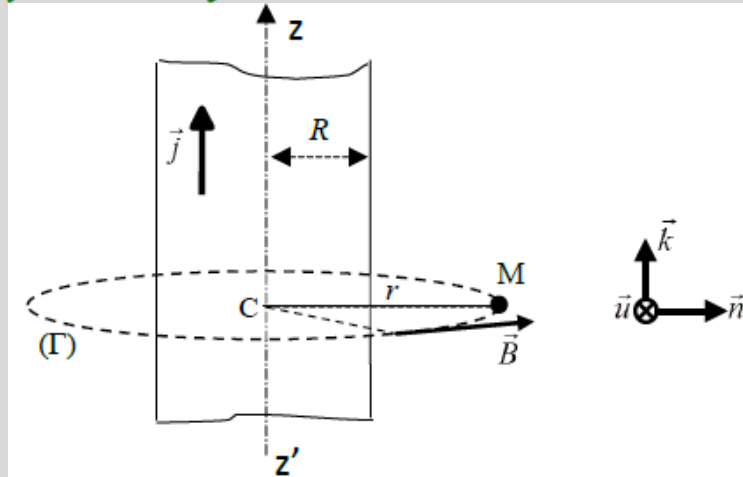
$$\text{On donne : } \vec{\text{rot}}(B(r)\vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{k}$$

2. Représenter  $B$  en fonction de  $r$  et commenter.

3. A.N : Calculer  $B_{max}$  pour  $j_0 = 1 \text{ A/mm}^2$ ,  $R = 5 \text{ cm}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ .

## Hypothèses :

A l'aide de l'analyse des **symétries** de la distribution des courants, on montre que :



- en tout point  $M$  n'appartenant pas à l'axe  $Z'Z$ ,  $\vec{B}$  est **orthogonal** au plan  $(MCZ)$  et ne dépend que de  $r$ , soit  $\vec{B} = B(r)\vec{u}$ .
- les lignes de champ en un point  $M$  sont des **cercles** de rayon  $r$ , centrés sur l'axe  $Z'Z$ .

→ Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

1<sup>er</sup> cas :  $r < R$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$= \mu_0 j_0 2\pi \int_0^r (1 - r/R) r dr = \mu_0 j_0 2\pi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right)$$

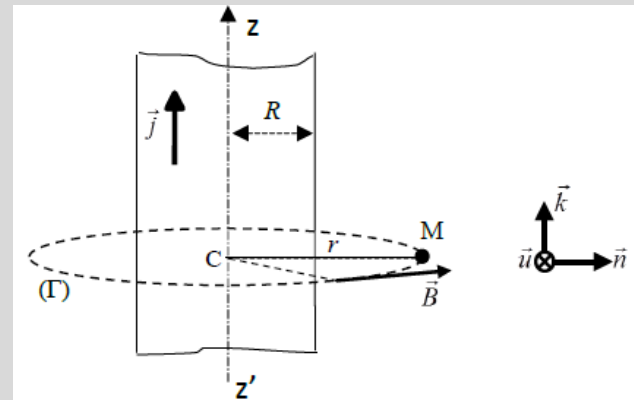
2<sup>ème</sup> cas :  $r > R$

$$B2\pi r = \mu_0 j_0 2\pi \int_0^R (1 - r/R) r dr = \mu_0 j_0 2\pi \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R} \right) = \mu_0 j_0 2\pi \frac{R^2}{6}$$

$$\text{Soit : } \vec{B}(M) = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{6r} \vec{u}$$

On vérifie bien la continuité de  $\vec{B}$  en  $r = R$  car  $\vec{j}_{(r=R)} = \vec{0}$ , soit :

$$\vec{B}_{(r=R)} = \underbrace{\mu_0 j_0 \left( \frac{R}{2} - \frac{R^2}{3R} \right)}_{r \leq R} \vec{u} = \underbrace{\mu_0 j_0 \frac{R^2}{6R}}_{r \geq R} \vec{u} = \mu_0 j_0 \frac{R}{6} \vec{u}$$



$$\text{Soit : } \vec{B}(M) = \mu_0 j_0 \left( \frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R} \right) \vec{u}$$

→ *Forme locale du th d'Ampère :*

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}}(B(r)\vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} \vec{k} = \mu_0 \vec{j}$$

1<sup>er</sup> cas :  $r < R$        $\vec{j}(M) = j_0(1 - r/R)\vec{k}$

soit:  $\frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = \mu_0 j_0 (r - r^2/R)$  donc:  $rB(r) = \mu_0 j_0 \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right) + C$  ( $C$ : cte d'intégration)

$rB_{(r=0)} = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow \vec{B}(M) = \mu_0 j_0 \left( \frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R} \right) \vec{u}$

2<sup>ème</sup> cas :  $r > R$        $\vec{j}(M) = \vec{0}$

soit:  $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = 0$  donc:  $rB(r) = C_1$  et  $B(r) = \frac{C_1}{r}$  ( $C_1$ : cte d'intégration)

Continuité de  $\vec{B}$  en  $r = R \rightarrow \mu_0 j_0 \left( \frac{R}{2} - \frac{R^2}{3R} \right) = \frac{C_1}{R} \rightarrow C_1 = \mu_0 j_0 \left( \frac{R^2}{6} \right)$

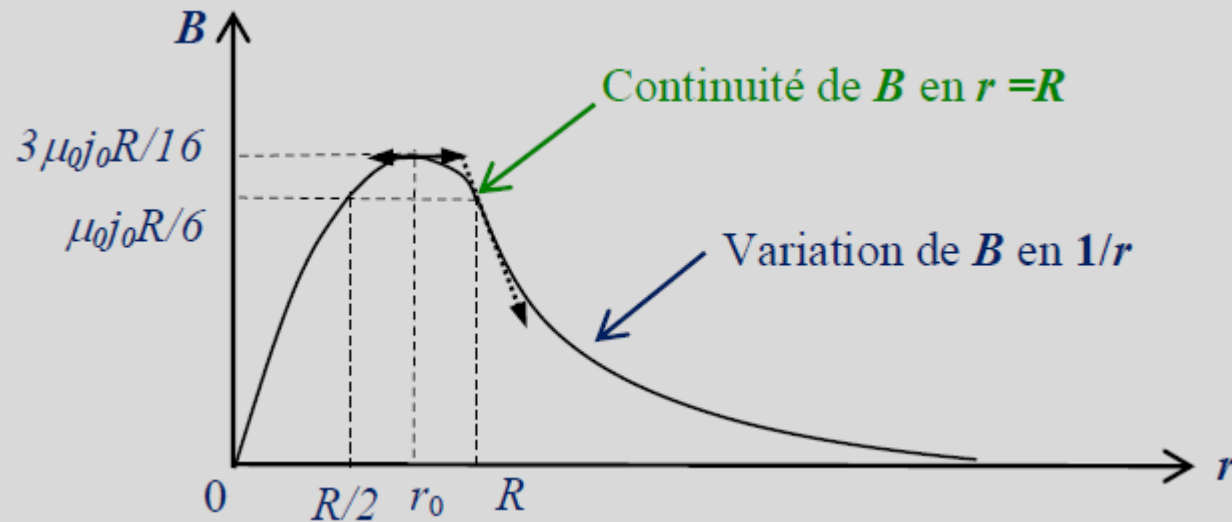
$\rightarrow \vec{B}(M) = \mu_0 j_0 \left( \frac{R^2}{6r} \right) \vec{u}$

## Représentation de $B$ en fonction de $r$

$$\frac{dB}{dr} = \mu_0 j_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{2r}{3R} \right) = 0 \quad \text{pour } r = r_0 = 3R/4$$

$$B_{max} = B(r = 3R/4) = 3\mu_0 j_0 R / 16$$

$$B(R) = B(R/2) = \mu_0 j_0 R / 6$$



Application numérique :  $j_0 = 1 \text{ A/mm}^2$   $R = 5 \text{ cm}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ .

$$B_{max} = 3\mu_0 j_0 R / 16 = 0,012 \text{ T}$$



# 4- Propriétés de flux de $\vec{B}$ – Potentiel vecteur

## Calcul de divergence de $\vec{B}$

Soit un élément de circuit  $d\vec{\ell}$  parcouru par un courant  $I$ .

Le champ  $d\vec{B}$  créé en un point  $M$  est :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (\text{Loi de Biot et Savart})$$

Pour un circuit fermé  $(C)$ , le champ créé en  $M$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Calculons  $\text{div } \vec{B}$  :

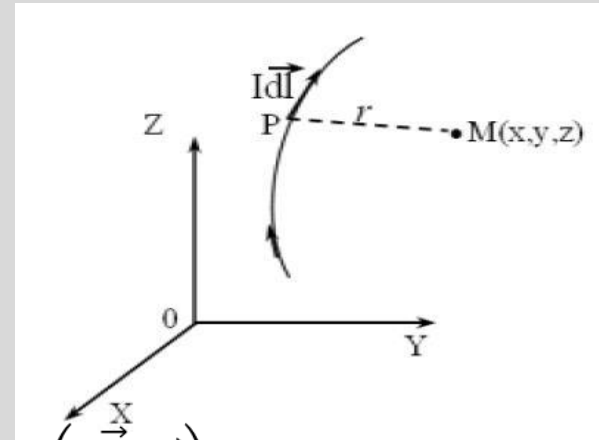
$$\text{div } \vec{B}(M) = \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{(C)} \text{div} \left( \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

Sachant que :

$$\text{div } \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{B} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

On aura :

$$\text{div } \vec{B}(M) = \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{(C)} \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}} (d\vec{\ell}) - d\vec{\ell} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]$$



Les opérateurs sont calculés par rapport au coordonnées de M, ce qui implique que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(d\vec{\ell}) = \vec{0}$$

D'autre part, on a:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{0}$$

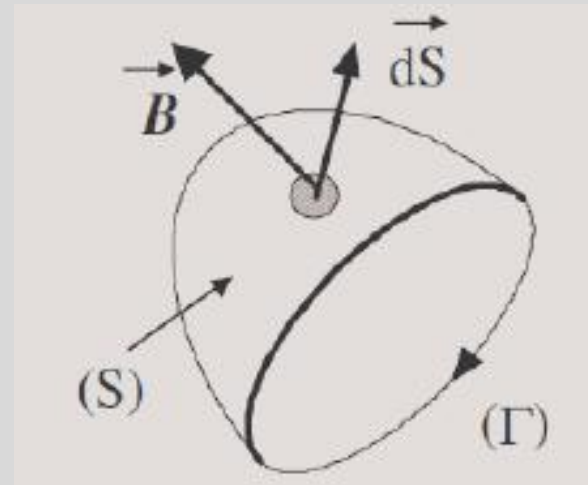
Par suite :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

- C'est la formule locale de *la conservation du flux* du champ magnétique à travers une surface fermée.
- Cette relation constitue une propriété intrinsèque du champ magnétique.

# Flux magnétique

- $(S)$  est une surface ouverte quelconque s'appuyant sur le contour fermé  $(\Gamma)$  ;
- $d\vec{S}$  est orientée par rapport au sens positif de circulation sur le contour à l'aide de la règle du **tire-bouchon**.



Le flux du champ magnétique à travers une surface **orientée**  $(S)$  est

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Unité de flux magnétique : le weber Wb

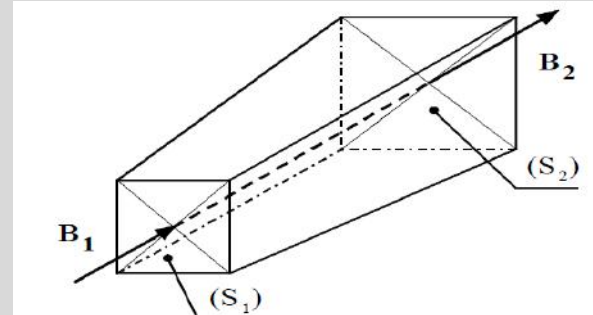
# Conservation du flux magnétique

$\text{div} \vec{B} = 0$   $\longrightarrow$  en choisissant (S) fermée et en utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$\longrightarrow \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{B} d\tau = 0$$

## Conséquences :

- le flux de  $\vec{B}$  est **constant** à travers toute section d'un **tube de champ**.



$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 \rightarrow \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2 = 0$$

On peut généraliser ce principe en disant qu'au sein d'un volume fermé, le **flux entrant est égal au flux sortant**.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif.

# Conservation du flux magnétique

D'autre part: d'après la forme locale du théorème d'Ampère :

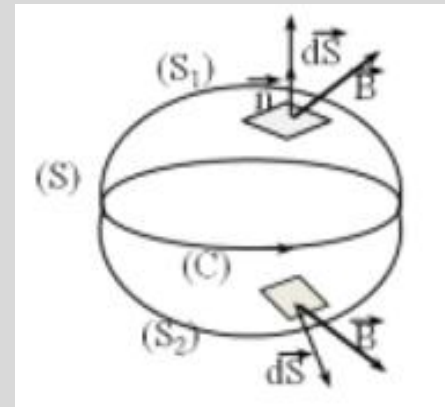
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Leftrightarrow \quad \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} = 0$$

$\text{div} \vec{J} = 0$  Car la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est égale à zéro

## Remarque:

$$\Phi_S = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot (\vec{n}_1) dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_2) dS$$

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} - \Phi_{S_2} = 0$$

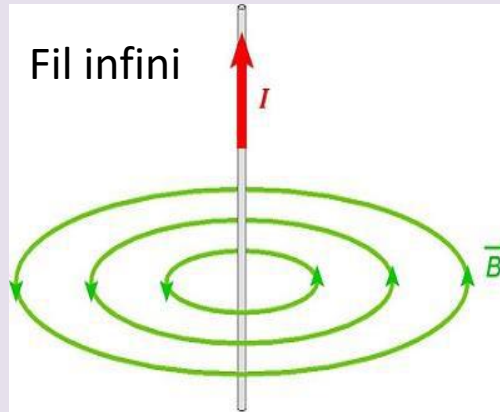
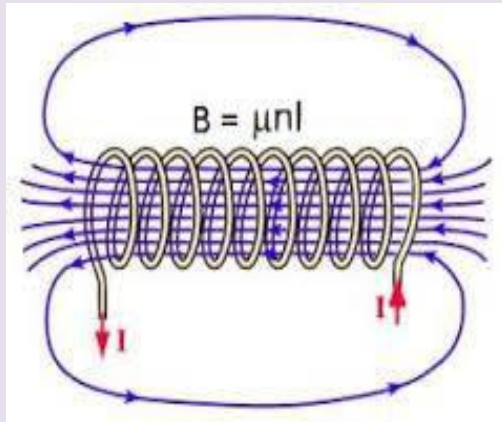


**Conclusion** : La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique doivent décrire des boucles fermées.

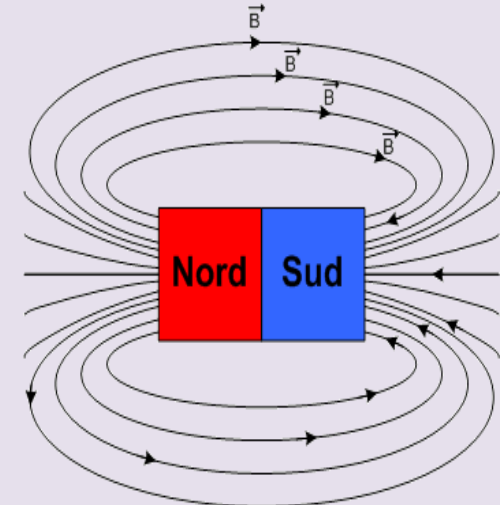
# Lignes de champ magnétique

$$\vec{B} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$$

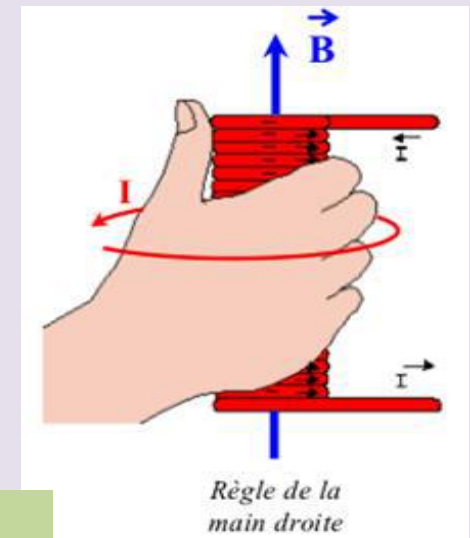
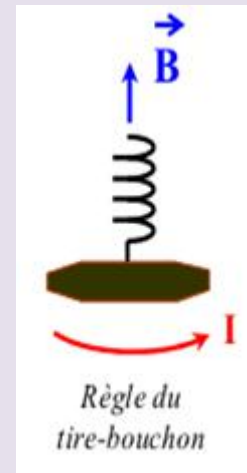
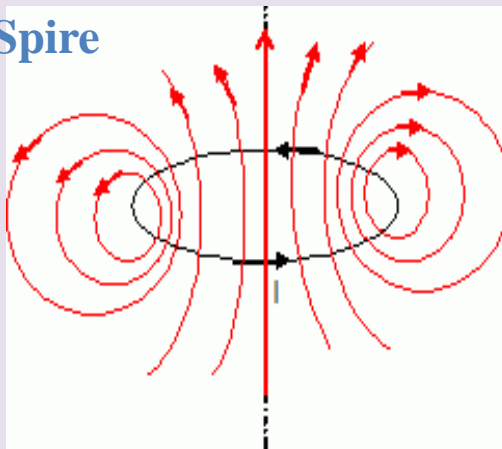
## Solénoïde



## Aimant droit



## Spire



1. Le champ magnétostatique tend à **s'enrouler autour des lignes de courant** qui le génèrent.
2. Le sens et la direction du champ se retrouvent grâce à la **règle de la main droite** (ou règle du tire-bouchon)

# Potentiel vecteur du champ magnétique

- On sait que  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = \mathbf{0}$  ;
- Puisque  $\text{div}\vec{B} = \mathbf{0}$ ,  $\exists$  donc un vecteur  $\vec{A}$  tel que :  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$  ;
- $\vec{A}$  est le **potentiel vecteur** de  $\vec{B}$ .
- Puisque  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi) = \vec{0}$ ,  $\vec{A}$  n'est défini qu'au gradient d'une fonction scalaire quelconque près.
- On ajoute une condition : *jauge de Coulomb* :  $\text{div}\vec{A} = \mathbf{0}$  , mais  $\vec{A}$  reste encore indéterminé à un vecteur constant  $\vec{K}$  près puisque  $\text{div}\vec{K} = \mathbf{0}$ .

En pratique, par analogie avec l'électrostatique, on pourra poser  $\vec{A} = \vec{0}$  à l'infini si le système de courants ne s'étend pas jusqu'à l'infini.

 Potentiel vecteur  $\vec{A}$  absolu

# Calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$

Forme locale du théorème d'Ampère  $\longrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

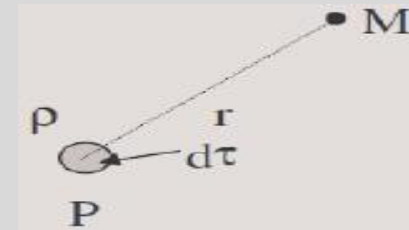
$$\longrightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad} \left( \underbrace{div\vec{A}}_0 \right) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

$$\longrightarrow \Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

**Equation de Poisson  
de la magnétostatique**

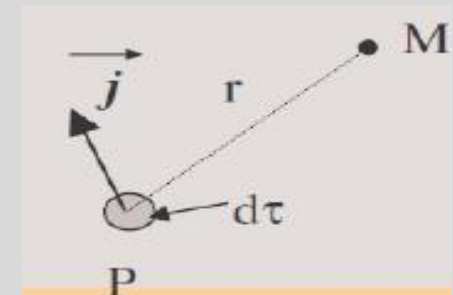
Analogie avec l'électrostatique où  $V$  était une fonction scalaire du même type :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{r} d\tau$$



$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \longrightarrow$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{\vec{j}}{r} d\tau$$





# Le potentiel vecteur pour les différentes distributions de courants

Dans le cas de courants de volume  $\vec{j}$  →

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{\vec{j}}{r} d\tau$$

Dans le cas de courants de surface  $\vec{k}$  →

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{\vec{k}}{r} dS$$

Dans le cas de courants filiformes  $I$  →

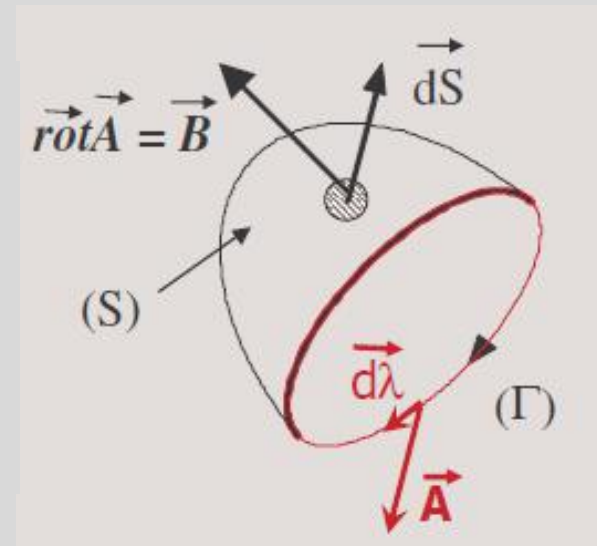
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I}{r} d\vec{\ell}$$

## Circulation du potentiel vecteur le long d'une courbe fermée

### Théorème de Stokes ➔

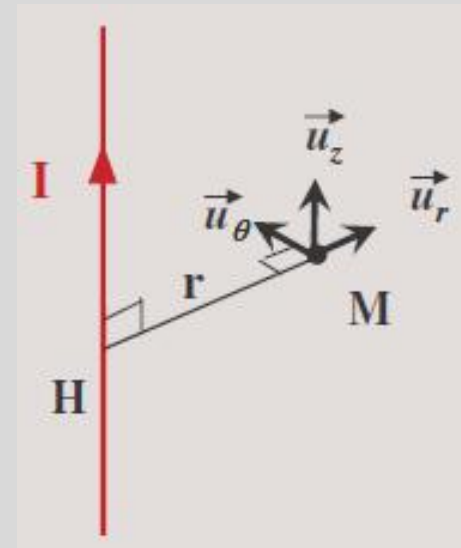
$$\oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_S$$

*Le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface (S) est égale à la circulation de son potentiel vecteur le long de la courbe qui limite cette surface.*



## Potentiel vecteur créé par un fil « infini » parcouru par un courant $I$

- Type de distribution de courants : filiforme, d'intensité  $I$ .
- Distribution de dimensions infinies
- On demande de calculer le potentiel vecteur en tout point  $M$  repéré par sa distance  $r$  à l'axe du fil infini.



- On travaille en coordonnées cylindriques ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ )

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

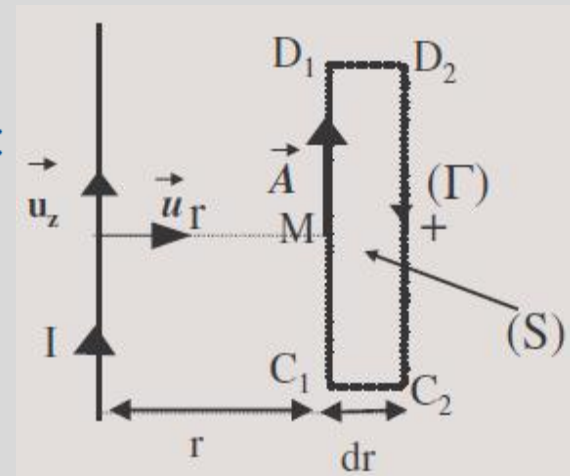
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I}{r} d\vec{\ell} \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = A(r) \vec{u}_z$$

## ➔ Calcul du potentiel vecteur : $\vec{A} = A(r)\vec{u}_z$

On sait que :  $\oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

On choisit le contour orienté  $(\Gamma)$   $C_1D_1D_2C_2$  :  
rectangle de longueur  $\ell$  parallèle au fil

et de largeur  $dr$  infiniment petite, entourant  
la surface rectangulaire  $(S)$ .



$$\oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} = A(r)\ell - A(r + dr)\ell \quad (\vec{A} \text{ orienté selon } \vec{u}_z)$$

$$\text{et } \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(r)\ell dr \quad (\vec{B} \perp \text{ à la surface } C_1D_1D_2C_2)$$

$$\text{or } A(r + dr) = A(r) + \frac{\partial A(r)}{\partial r} dr \rightarrow \frac{\partial A(r)}{\partial r} = -B(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr}{r} + K \quad \rightarrow \quad \vec{A} = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + K \right) \vec{u}_z$$

**Remarque** :  $K$  est une constante arbitraire. On ne peut pas dans ce cas définir de potentiel vecteur absolu car le fil est infini.

# Relations de passage

## a) Composante normale

Soit une distribution surfacique de courant  $\vec{j}_s$  séparant l'espace en deux régions 1 et 2.

Considérons une surface fermée fictive, traversant la nappe de courant. La conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

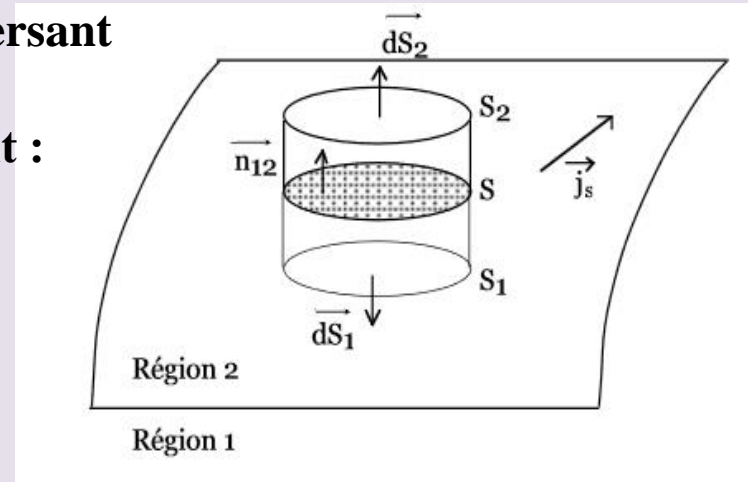
où  $S_L$  est la surface latérale. Lorsqu'on fait tendre cette surface vers zéro ( $S_1 \rightarrow S_2$ ), on obtient :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} dS = 0$$

puisque  $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = -dS \vec{n}_{12}$  dans cette limite. Ce résultat étant valable quelque soit la surface  $S$  choisie, on vient donc de démontrer que:

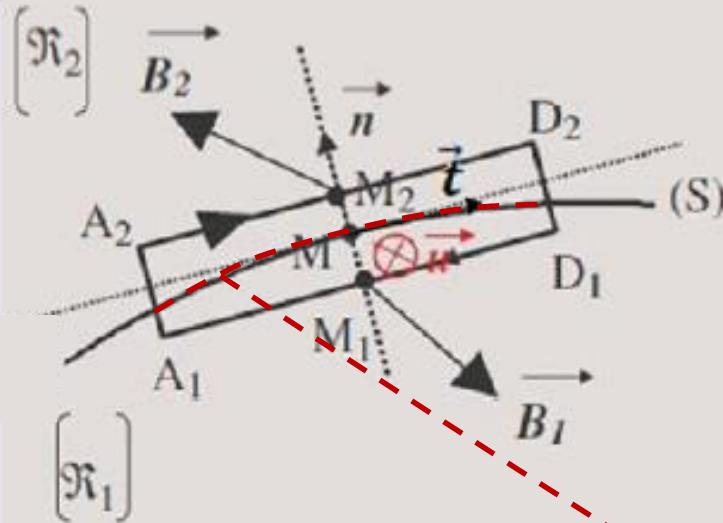
$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

À la traversée d'une nappe de courant, la composante normale du champ magnétique reste continue



## b) Discontinuité de la composante tangentielle

Contour rectangulaire choisi  $D_1A_1A_2D_2D_1$



Th. d'Ampère appliqué au contour fermé  $(\Gamma) = D_1A_1A_2D_2D_1$

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 di$$

circulation sur  $A_1A_2$  et  $D_1D_2 \equiv 0$

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{u})$  Forme un trièdre direct

$$\rightarrow \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{D_1A_1} + \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{A_2D_2} = \mu_0 di = \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{u} A_2 D_2$$



$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot A_2 D_2 \vec{t} = \mu_0 \vec{k} \cdot A_2 D_2 \vec{u}$$

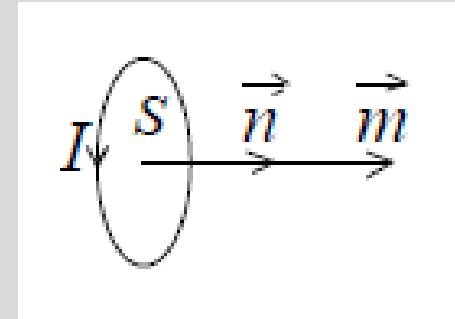
Discontinuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$

En transformant et simplifiant :

$$\vec{n} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_{(S)} = \mu_0 \vec{k}$$

## Dipôles magnétiques

- Un **dipôle magnétique** est une boucle élémentaire de courant électrique de **dimensions très petites** par rapport aux distances considérées
- Un dipôle magnétique est caractérisé par son moment défini par :



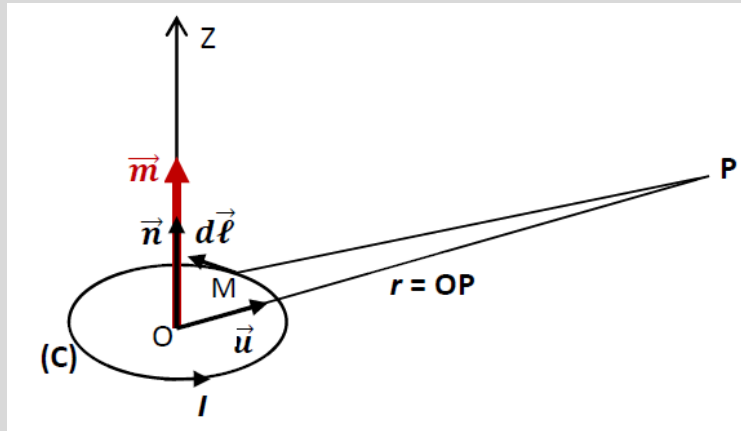
$$\vec{m} = IS\vec{n} \quad (m \text{ s'exprime en } \text{A}\cdot\text{m}^2)$$

$I$  : intensité du courant électrique dans la boucle ;

$S$  : surface de la boucle ;

$\vec{n}$  : vecteur unitaire  $\perp$  à la surface et dont le sens est lié au sens du courant par la règle du tire-bouchon.

## Calcul du potentiel vecteur créé par la boucle de courant, à « grande distance » $r$ (avec $O$ à l'intérieur de $(C)$ )



- $\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I}{MP} d\vec{\ell}$

- $\vec{v}$  vecteur constant  $\longrightarrow$

$$\vec{A}(P) \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(C)} \frac{\vec{v}}{MP} \cdot d\vec{\ell}$$

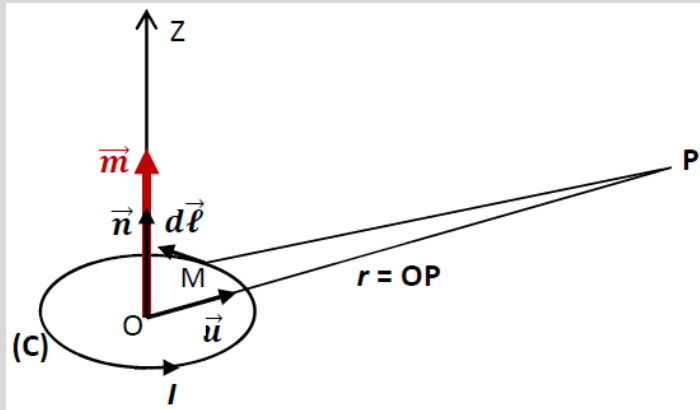
- Th de Stokes  $\longrightarrow \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(C)} \frac{\vec{v}}{MP} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{v}}{r} \right) \cdot d\vec{S}}_{(S) \text{ de dimensions très petites} \rightarrow M \equiv O \rightarrow MP \approx r}$

- $\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{v}}{r} \right) = \frac{1}{r} \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \wedge \vec{v} \longrightarrow$

$$\vec{A}(P) \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\iint_{(S)} \left( \overrightarrow{\text{grad}}_O \frac{1}{r} \wedge \vec{v} \right) \cdot d\vec{S}}_{\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \text{ est presque le même sur } (S)} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\left( \iint_{(S)} d\vec{S} \right)}_{=\vec{S}} \cdot \left( \overrightarrow{\text{grad}}_O \frac{1}{r} \wedge \vec{v} \right)$$



$$\vec{A}(P) \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{I \vec{S}}_{=\vec{m}} \cdot \left( \overrightarrow{\text{grad}}_O \frac{1}{r} \wedge \vec{v} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_O \frac{1}{r} \cdot \vec{v} \quad \rightarrow$$



$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_O \frac{1}{r}$$

$$P \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}, \quad O \begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$r = OP = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

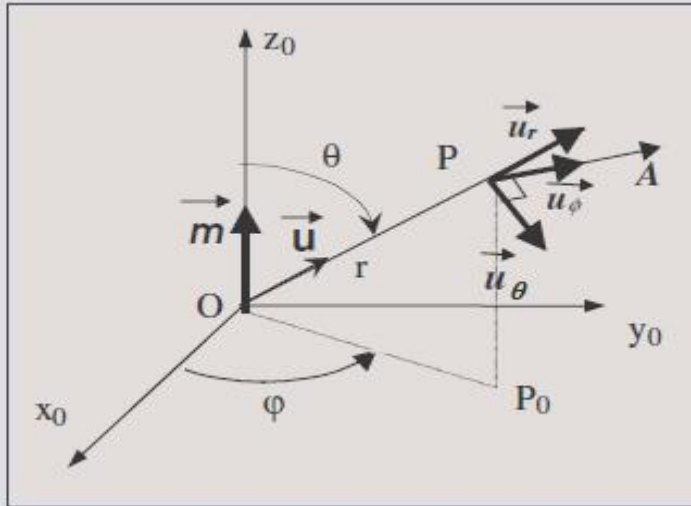
$$\rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_O}_{\left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0} \right)} \frac{1}{r} = - \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_P}_{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)} \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \vec{A}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{r}$$

ou

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

## Exemple de détermination du champ magnétique à partir de la relation locale: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$



$$\vec{m} = m \cos \theta \vec{u}_r - m \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

$$\vec{A} \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \underbrace{\frac{\partial(r \sin \theta A_\phi)}{\partial \theta}}_{\frac{\mu_0 m}{4\pi r} \frac{\partial(\sin^2 \theta)}{\partial \theta}} - \underbrace{\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \phi}}_0 \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \underbrace{\frac{\partial A_r}{\partial \phi}}_0 - \underbrace{\frac{\partial(r \sin \theta A_\phi)}{\partial r}}_{\frac{\mu_0}{4\pi} m \sin^2 \theta \frac{\partial(1/r)}{\partial r}} \right) \vec{u}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \underbrace{\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r}}_0 - \underbrace{\frac{\partial A_r}{\partial \theta}}_0 \right) \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

$$\vec{B} \begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

à  $r$  donné,  $B$  max sur l'axe du moment magnétique

Exemple de détermination du champ magnétique à partir de la relation locale:  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$

$$\vec{m} = m \cos \theta \vec{u}_r - m \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} \begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

➔ 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

➔  $B_r \rightarrow \text{max}$  et  $B_\theta \rightarrow 0$  pour  $\theta \rightarrow 0$   
 $B_r \rightarrow 0$  et  $B_\theta \rightarrow \text{max}$  pour  $\theta \rightarrow \pi/2$

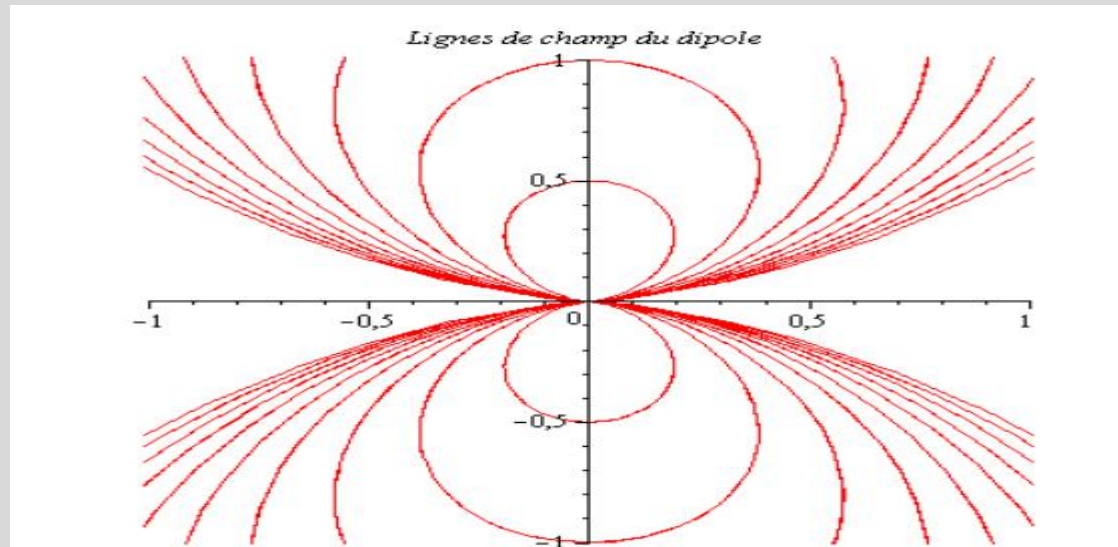
## Exemple de détermination du champ magnétique à partir de la relation locale: $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$

On peut faire le tracé des lignes de champ. A partir de

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta}$$

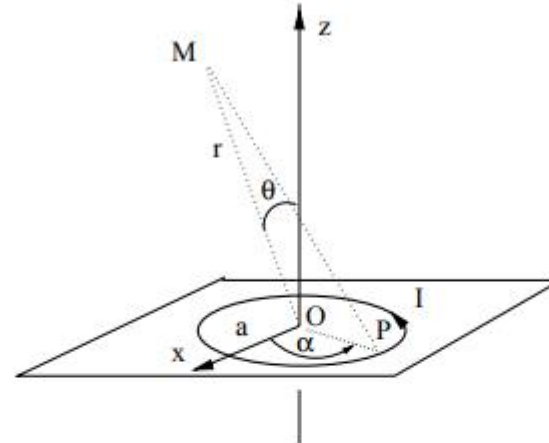
on montre que  $r = r_0 \cdot \sin^2\theta$

On obtient alors le tracé suivant :



### ■ Exercice Dipôle magnétique

Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  le repère cartésien centré en O, centre de la boucle de rayon  $a$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  constante. L'axe Oz est orthogonal au plan de la spire (plan xOy). La boucle est orientée dans le sens trigonométrique. On veut calculer le potentiel vecteur magnétostatique  $\vec{A}(\vec{r})$  et le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  en un point M de l'espace très éloigné de la boucle. Compte-tenu de la symétrie de révolution du système, on peut choisir de calculer ces quantités en un point M du plan xOz, ce qui simplifiera les calculs. Le vecteur  $\vec{OM} = \vec{r}$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe Oz. On considère un point P de la boucle repéré par l'angle polaire  $\alpha$  entre  $\vec{OP}$  et l'axe Ox.



1. Exprimer la contribution de l'élément infinitésimal  $d\vec{l}$  de la boucle autour du point P au potentiel vecteur  $\vec{A}$  et au champ  $\vec{B}$ .
2. En déduire les expressions formelles exactes de  $\vec{A}$  et de  $\vec{B}$  en M. Les sens et directions de ces vecteurs sont-ils conformes à vos attentes? Vérifier que ces expressions redonnent bien les expressions connues pour M situé au centre de la boucle et sur l'axe Oz.
3. On se place loin de la boucle ( $r \gg a$ ) (cas de "l'approximation dipolaire"). En effectuant les développements limités appropriés, montrer que le module du potentiel vecteur est proportionnel à  $1/r^2$  et celui du champ à  $1/r^3$ .
4. On introduit alors le moment magnétique dipolaire (vecteur) de la boucle :  $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est la normale orientée à la surface de la boucle, soit ici  $\vec{n} = \vec{e}_z$ .

Montrer alors que pour  $r \gg a$ , on obtient les expressions suivantes:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \quad (1.3)$$

5. Tracer les lignes de champ.
6. Comparer ces résultats à ceux obtenus pour le dipôle électrique.